	DÍA/MES/AÑO:	31/07/2020	GUÍA No 5 - TEOREMA DE TALES Y PITÁGORAS - CUERPOS GEOMÉTRICOS - FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.	GRADO: DECIMO
	ÁREA:	MATEMÁTICAS		
	ASIGNATURA:	ALGEBRA		
	WHATSAPP:	3182936137 3017967997	DOCENTES Adelina Del Socorro Pineda Jorge Jaramillo Ponce	

APRENDIZAJES

Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Tales y teorema de Pitágoras), para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

Identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) con referencia a las situaciones escolares y extraescolares.

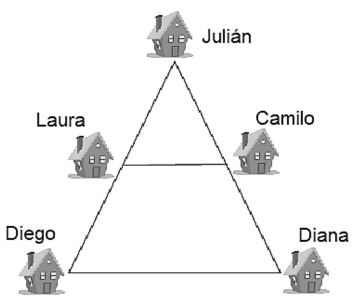
Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.

"EL SEÑOR ES MI FORTALEZA"

CONTEXTUALIZACIÓN

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Camilo, Juan, Diego, Laura y Diana viven en el campo, sus casas están ubicadas formando un triángulo, donde la línea de los segmentos de las casas de Laura, Camilo, Diego y Diana son paralelas, como se indica en la figura.



Si la distancia que hay de la casa de Julián a la de Laura es de 2km, la distancia de la casa de Diego a la casa de Diana es de 6km y entre Diego y Julián hay 5km. La distancia de la casa de Laura a la de Camilo es de:

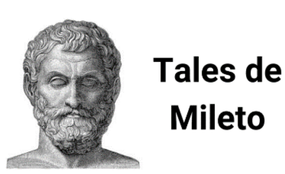
A. $\frac{12}{5}km$

B. $\frac{5}{12}km$

C. $\frac{5}{3}km$

D. $\frac{3}{5}km$

Para resolver este tipo de problemas se utiliza el teorema de Tales.

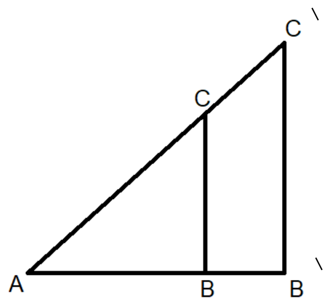


Tales de Mileto fue un filósofo, matemático, geómetra, físico y legislador griego, el cual se le atribuye su nombre a dos teoremas.

1. TEOREMA

EN UN TRIÁNGULO

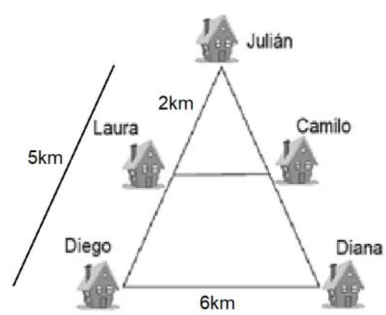
Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triangulo dado.



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Triángulos semejantes son los triángulos que tienen la misma forma, ángulos iguales, lados proporcionales.

En el problema anterior:



$$\frac{DD}{LC} = \frac{DJ}{LJ} \quad => \quad \frac{6Km}{X} = \frac{5Km}{2Km}$$

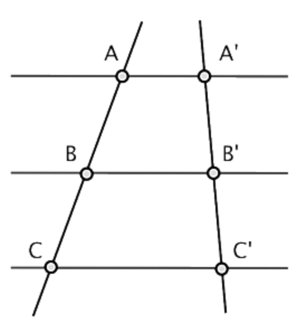
Aplicando ley fundamental de las proporciones

$$x = \frac{6km \,.\, 2km}{5km} = \frac{12km}{5} \quad ; \qquad x = 2.4km$$

2. TEOREMA

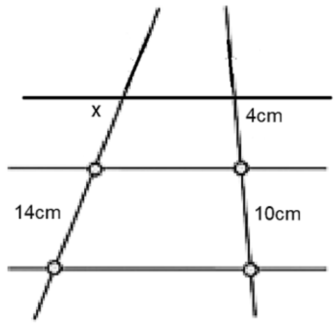
EN DOS RECTAS

Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra recta.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

EJEMPLO:

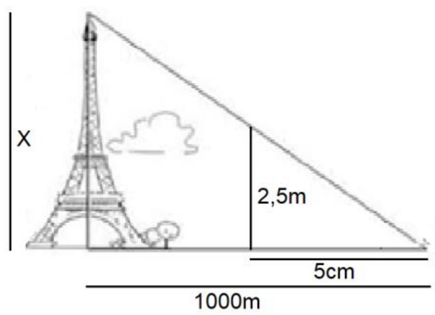


$$\frac{4cm}{x} = \frac{10cm}{14cm} \quad => \quad 4cm\,.\,14cm = x\,.\,10cm$$

$$\frac{56cm^2}{10cm} = x \quad ; \quad x = 5{,}6cm$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Sabiendo que la altura de un poste de luz es de 2.5 metros y se encuentra de forma paralela a la torre Eiffel como se muestra en la figura:



Entonces la relación de semejanza que permite hallar la altura **X** de la torre es:

A. $\frac{x}{5} = \frac{2{,}5}{1000}$

B. $\frac{5}{x} = \frac{2{,}5}{1000}$

C. $\frac{5}{2{,}5} = \frac{x}{1000}$

D. $\frac{x}{2{,}5} = \frac{1000}{5}$

Respuesta **D** porque por el teorema **1** de Thales la relación correcta es:

$$\frac{x}{2{,}5} = \frac{1000}{5} \quad => \quad x\,.\,5 = 1000\,.\,2{,}5$$

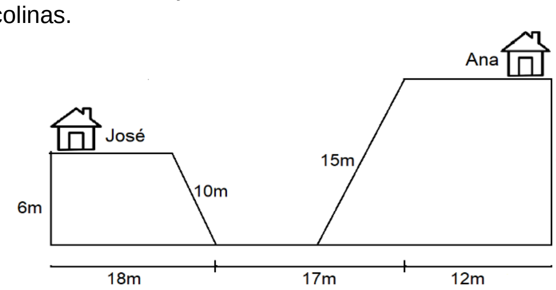
$$x = \frac{1000\,.\,2{,}5}{5} \quad ; \quad x = 500$$

Corresponde a la altura de la torre Eiffel.

TEOREMA DE PITÁGORAS

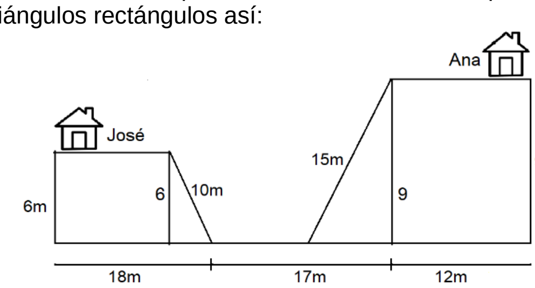
SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

La casa de José y Ana están ubicados en la cima de dos colinas.

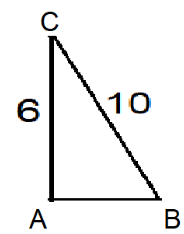


¿Cuál es la distancia que debe recorrer José para llegar a la casa de Ana?

Solución
Con los datos del problema se forma en el esquema dos triángulos rectángulos así:



El triángulo ABC



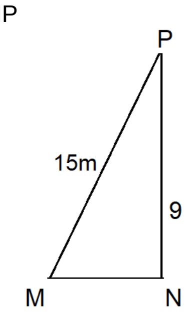
Por el teorema de Pitágoras encuentro el lado AB

$$10^2 = 6^2 + (AB)^2 \quad => \quad \sqrt{100-36} = AB$$

$$\sqrt{64} = AB \quad => \quad 8 = AB$$

Luego hallo la diferencia 18 – 8 = 10

En el triángulo MNP



$$(15)^2 = (MN)^2 + 9^2 \quad => \sqrt{225-81} = MN$$

$$\sqrt{144} = MN \quad => \quad 12 = MN$$

Luego hallo la diferencia 17 – 2 = 5

Adiciono 10 + 10 + 5 + 15 + 12 = 52

El teorema de Pitágoras establece que la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado.

Esto indica que si a y b son las medidas de los catetos y c es la medida de hipotenusa entonces se cumple

$$c^2 = a^2 + b^2$$

El teorema de Pitágoras relaciona las áreas de los cuadrados que se forman a partir de los lados del triángulo.

POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS

POLIEDRO:

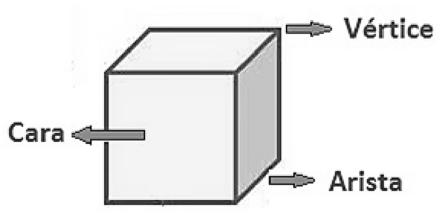
El termino poliedro se utiliza para designar aquellas figuras geométricas tridimensionales, que están compuestas por varias caras que encierran un volumen finito.

Los elementos notables del poliedro son:

Caras: Son los planos que se forman a lo largo de la superficie del poliedro.

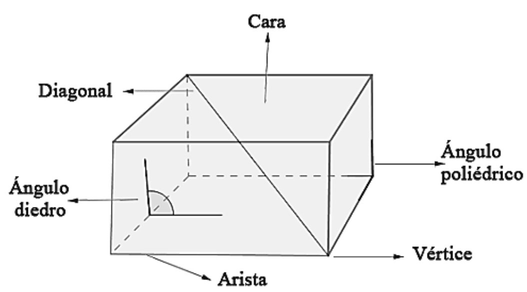
Aristas: Son los lados de las caras del poliedro.

Vértices: Son los puntos de unión de 2 o más aristas.



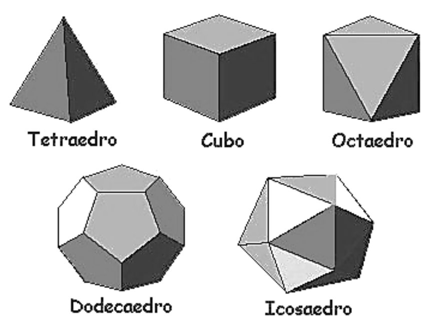
Ángulo Diedro: Son ángulos formados por cada dos caras, tienen una arista en común

Ángulos Poliedros: Son ángulos formados por dos o más caras, con un vértice en común.

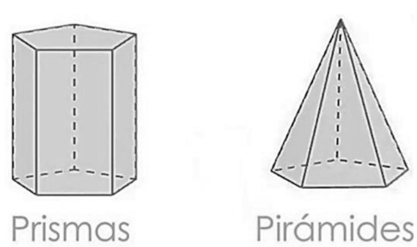


Tipos de poliedros:

Poliedros Regulares: Es aquel que sus caras son polígonos regulares y son todos iguales, ángulos y aristas son iguales, existen 5 tipos de poliedros regulares tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, e icosaedro.



Poliedros Irregulares: Sus caras son polígonos no regulares.



Prisma: cuya superficie está formada por dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y por caras laterales.

Pirámide: Cuya superficie está formada por una base que es un poliedro y caras triangulares que confluyen en un vértice que se denomina cúspide.

CUERPOS REDONDOS:

La Catedral Basílica De Nuestra Señora De La Gloria De Maringa. Es una iglesia ubicada en el estado de Paraná en Brasil, esta estructura es considerada como la iglesia más alta de Suramérica, con un cuerpo de 114 metros de altura y en su parte superior hay una cruz de 10 metros de longitud.

¿Qué características geométricas tiene el cuerpo de esta iglesia?

La iglesia tiene forma de cono, su superficie lateral es curva y termina en un vértice a 114 metros del piso donde se encuentra la cruz. En la parte inferior tiene varios tetraedros que parecen estar incrustados en el cono y tiene una base plana.

CUERPOS REDONDOS

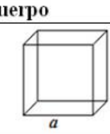
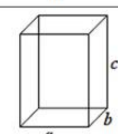
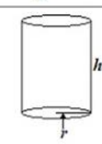
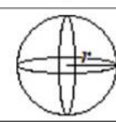
Un cuerpo redondo es un sólido limitado por superficies curvas y planas, los principales cuerpos redondos son: el cilindro, cono y esfera.

El cilindro: Un cilindro es un sólido limitado por dos caras circulares y una superficie curva. La superficie curva se denomina cara lateral y las dos caras circulares se denominan bases.

El cono: Es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y por una cara plana circular.

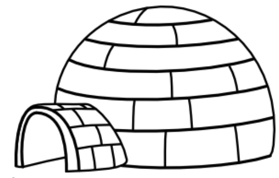
La Esfera: Es un cuerpo redondo limitado por una sola superficie curva cuyos puntos equidistan de un punto fijo llamado centro.

FORMULAS DE VOLÚMENES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

	Cuerpo	Volumen
Cubo		$V = a^3$
Prisma		$V = a \cdot b \cdot c$
Cilindro		$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Esfera		$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Un iglú es un refugio en las zonas heladas que se construyen con bloques de nieve en forma semiesférica. Si su altura es de 2 metros ¿Cuál es el volumen que ocupa el iglú?

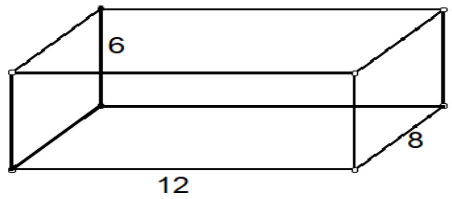


$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$ Volumen de la esfera

$$V\ igl\grave{u} = \frac{\frac{4}{3}\pi\, r^3}{2} \quad => \quad V = \frac{4\pi\,(2m)^3}{6}$$

$$V = \frac{2\pi\,.\,8}{3} \quad => \quad \frac{16\pi}{3}cm^3$$

2. Se desea empacar una lámina rectangular de la mayor área posible suficientemente delgada en una caja con forma de paralelepípedo, cuyas dimensiones interiores son 6cm, 8cm, y 12cm. Las dimensiones de esta lamina que puede guardarse en la caja sin doblarse en centímetros es:



Las dimensiones de la lámina son las de un rectángulo. El largo es de 12 pero el ancho se halla con la diagonal de las caras mediante el teorema de Pitágoras.

$$d^{2=}8^2 + 6^2 \quad => \quad d = \sqrt{100} = 10$$

Las dimensiones de la lámina son de 12cm y 10cm.

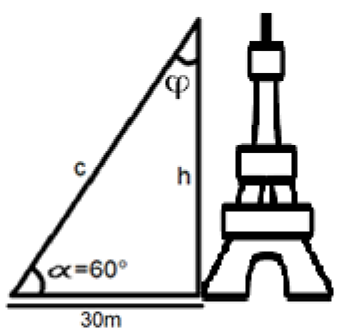
SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

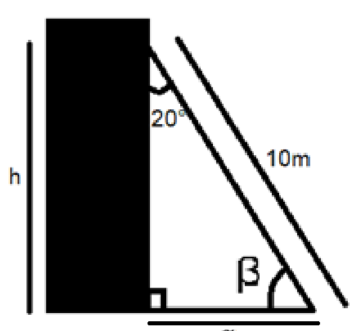
La solución de triángulos ha sido utilizada desde la antigüedad en áreas como la astronomía, la navegación, etc., para hacer mediciones de distancias inaccesibles como la distancia de la tierra a la luna y la medida del radio del sol, entre otras.

Resolver un triángulo consiste en determinar la medida de sus tres lados y de sus ángulos. La resolución de un triángulo se realiza teniendo en cuenta que tipo de triangulo es y las medidas que se conocen. En este caso para resolver un triángulo rectángulo se presentan dos casos:

• Se conocen las medidas de uno de sus lados y de un ángulo agudo.

• Se conocen las medidas de dos lados





Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen la medida de un lado y de un ángulo agudo.

En este caso se plantea una ecuación a partir de una razón trigonométrica que relacione la incógnita (medida desconocida) con la medida del lado y del ángulo que se conocen. La razón trigonométrica que se aplique depende de la medida del lado que se conoce, el cual puede ser uno de los catetos o la hipotenusa.

Ejemplos.
1. Resolver el triángulo rectángulo asociado a la altura de la torre de la figura 1.

Solución:
En este caso se conoce la medida de un cateto y de uno de los ángulos agudos, por tanto, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se calcula la altura de la torre, para eso se aplica $\tan \alpha$, ya que es la función trigonométrica que relaciona la medida del cateto conocido como la incógnita **h.**

$$tan\ \alpha = \frac{h}{30} de\ donde\ h = 30\ tan\ 60° \approx 52m$$

Luego, se calcula la medida de la hipotenusa (c). Para esto se utiliza la función $\cos \alpha$.

$$cos 60° = \frac{30}{c}\ de\ donde\ c = \frac{30}{cos 60°} = 60m$$

Finalmente, se calcula la medida del ángulo φ

$$\varphi = 180° - 90° - 60°$$
$$\varphi = 30°$$

Entonces, las medidas de los lados son 30m, 52m y 60m y las medidas de los ángulos son 90°, 60° y 30° respectivamente.

2. resolver el triángulo rectángulo que forma la escalera con la pared de la figura 2.

Solución
En este caso se conoce la medida de la hipotenusa y uno de los ángulos agudos, por tanto, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se calcula la altura que alcanza la parte más alta de la escalera así:

$$cos\ 20° = \frac{h}{10} de\ donde\ h = 10\ cos\ 20° \approx 9{,}4m$$

Luego, se calcula la distancia de α de la base de la escalera a la pared, aplicando el teorema de Pitágoras

$$\alpha = \sqrt{(10)^2 - (9{,}4)^2}$$
$$\alpha = \sqrt{100 - 88{,}36} \approx 3{,}4$$

Finalmente, se calcula la medida del ángulo β

$$\beta = 180° - 90° - 20°$$
$$\beta = 70°$$

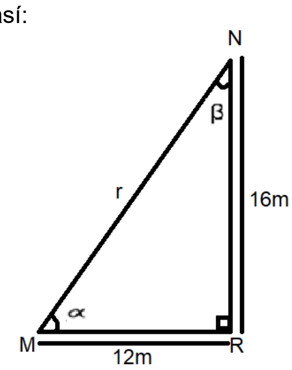
Entonces, las medidas de los lados del triángulo son 10m, 9,4m, y 3,4m y las medidas de los ángulos son 20°, 90° y 70° respectivamente.

Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen las medidas de dos lados.

En este caso se aplican las funciones trigonométricas inversas para determinar el valor de los ángulos desconocidos. La medida del tercer lado se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, para resolver el triángulo MNR, cuyos catetos miden 12cm y 16cm respectivamente, se realizan los siguientes pasos:

Primero: se traza el triángulo MNR y se escriben las medidas de los catetos, como se muestra en la figura.

Segundo, Se aplica una razón trigonométrica que relaciona las medidas de los catetos y se halla la medida del ángulo α, así:



Primero, se traza el triángulo MNR y se escriben las medidas de los catetos, como se muestra en la figura.

Segundo, se aplica una razón trigonométrica que relacione las medidas de los catetos y se halla la medida del ángulo α, así:

$$tan\alpha = \frac{16}{12} \quad \textit{Se aplica la tangente del angulo } \alpha$$
$$\tan\alpha = 1{,}33 \quad \textit{Se efectúa la división}$$
$$\alpha = arctan\frac{16}{12} \approx 53°$$
Se aplica la función inversa, y se aproxima la medida del ángulo.

Tercero, se halla la medida del ángulo β

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$
Se plantea la suma de las medidas de los ángulos internos

$$53° + \beta + 90° = 180° \quad \textit{se reemplaza la medida de } \alpha$$

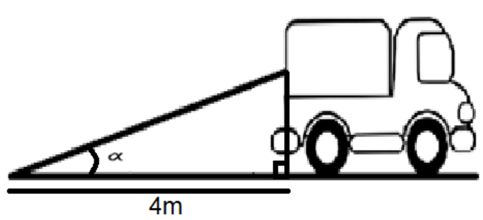
$$\beta = 37° \quad \textit{Se despejo } \beta$$

Luego, se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la medida de la hipotenusa.

$$r = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = 20m$$

Finalmente se tiene que $\alpha = 53°, \beta = 37°\ y\ r = 20m$, con lo cual se resuelve el triángulo rectángulo.

Ejemplo 2
Para realizar el transporte se cierta mercancía se utiliza una rampa de 6m como se muestra en la figura. Calcular la medida del ángulo que forma la rampa con el suelo.



Se realizan los siguientes pasos:

$$\cos\alpha = \frac{4}{6}$$ Se aplica la función coseno.
$$\cos\alpha = 0{,}66$$ Se divide

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{6}\right) \approx 48{,}2°$$ Se aplica la función inversa de coseno y se aproxima la medida del ángulo.

Por tanto, el ángulo que forma la rampa con el suelo mide aproximadamente 48,2°.

ANGULO DE ELEVACIÓN Y ÁNGULO DE DEPRESIÓN

Cuando se observa un objeto, la semirrecta imaginaria cuyo punto de origen corresponde a los ojos del observador y que pasa por el objeto, se denomina **línea visual**. Además, si se considera la línea **horizontal** como una semirrecta cuyo sentido se orienta hacia el objeto y su origen corresponde a los ojos del observador, entonces se pueden definir los siguientes ángulos que dependen de la ubicación del objeto:

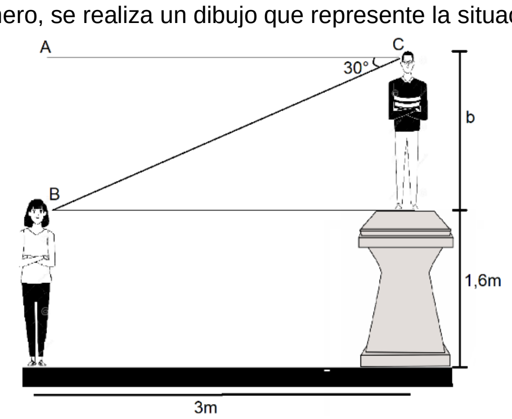
• **Angulo de elevación**: Es aquel que se forma entre la línea visual y la horizontal cuando el objeto está por encima de la horizontal
• **Angulo de depresión**: Es aquel que se forma entre la línea visual y la horizontal cuando el objeto está por debajo de la horizontal.

Podemos observar mejor esto con la siguiente imagen:

Ejemplos:

1. David se sube en un pedestal de 1,6m de altura y desde allí observa a María con un ángulo de depresión de 30°, como se muestra en la figura. Si la altura del pedestal es igual a la estatura de María y ella esta a 3 metros del pedestal, ¿Qué altura alcanza David con respecto al suelo?

Primero, se realiza un dibujo que represente la situación.



Segundo, se calcula la estatura de David como $\overline{AB}$ es el lado opuesto al ángulo de depresión y AC = 3m, entonces, se tiene que:

$$\tan 30° = \frac{b}{6}$$ Se aplica la función tangente

$$b = 3\tan 30° \approx 1{,}73$$ Se despeja y se aproxima el valor de b

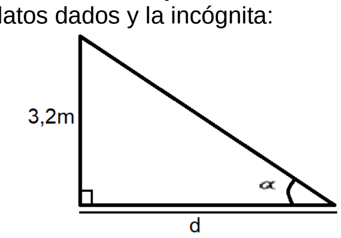
Luego, se suma la estatura de David con la altura del pedestal para hallar la altura b que alcanza David con respecto al suelo.

$$b = 1{,}73 + 1{,}6 = 3{,}33$$

Finalmente, se tiene que David alcanza una altura de 3,33m con respecto al suelo.

2. En un teatro los ojos de un observador se ubican a la misma altura de la base de la pantalla. Además, si el observador mira la parte superior de la pantalla se forma un ángulo de elevación α. Teniendo en cuenta que $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ y que la altura de la pantalla es 3,2m, ¿A que distancia esta el observador de la pantalla?

Primero, se realiza un dibujo de la situación en el que se ubican los datos dados y la incógnita:



Luego, se calcula el ángulo de elevación α

$$\cos\alpha = \frac{15}{17}$$ Se escribe el valor de $\cos\alpha$
$$\alpha = cos^{-1}\frac{15}{17} \approx 48{,}2°$$
Se aplica la función inversa de coseno y se aproxima la medida del ángulo de elevación.

Finalmente, se aplica la función tangente para calcular d, así:

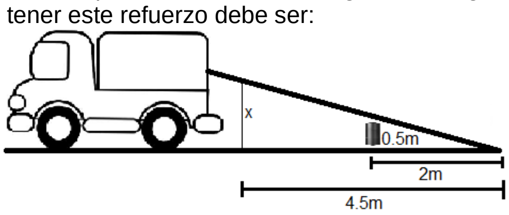
$$d = \frac{3{,}2}{\tan 28°} \approx 6$$

Por tanto, el observador está a 6m de la pantalla.

TALLER DE APLICACIÓN

Apoyándose en los conocimientos adquiridos de la fundamentación teórica resuelve.

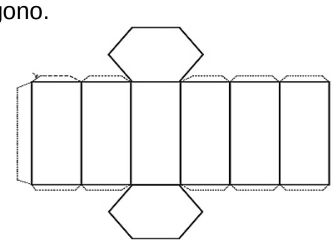
1. Mientras se cargaba un camión se puso una tabla con un barril de 0.5m de altura para subir por ella una carreta. Sin embargo, como el peso doblaba la tabla, se decidió ubicar un refuerzo debajo de ella, a 4.5m del contacto de la tabla con el piso, como muestra la figura. La longitud que debe tener este refuerzo debe ser:



A. 1,005m
B. 1,115m
C. 1,125m
D. 1,2m

Responda las siguientes preguntas 2, 3 de acuerdo con la siguiente información.

El siguiente plegable corresponde a un prisma cuya base es un pentágono.



2. La cantidad de vértices que tiene el sólido formado son

A. 5
B. 10
C. 12
D. 15

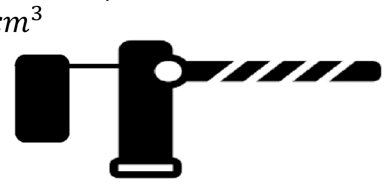
3. Al doblar la plantilla y formar el sólido, se observa que el polígono de su base es un:

A. Pentágono
B. Triángulo
C. Rectángulo
D. Hexágono

Responda las siguientes preguntas 4, 5 de acuerdo con la siguiente información.

Pedro debe dar paso a los autos subiendo y bajando un poste que pesa 100kg. Para hacer la tarea más fácil, un depósito cilíndrico de 1 metro de diámetro se llena con arena, que funciona como contrapeso.

Nota: Se sabe que diez kilos de arena ocupan $5000\pi\ cm^3$



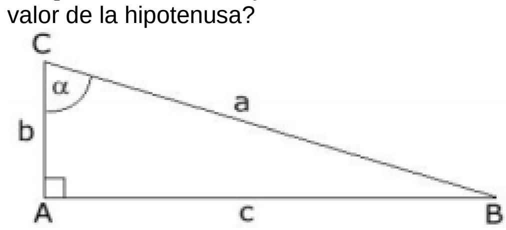
4. La altura que debe tener el cilindro para quedar en equilibrio con el poste de 100kg es:

A. 10cm
B. 20cm
C. 30cm
D. 50cm

5. Por norma se debe cubrir el cilindro con una pintura especial reflectiva que recubre 100cm^3 por cada 100ml. ¿Cuántos mililitros de pintura se necesitan para pintar la tapa y la base del cilindro?

A. 5000π
B. 6000π
C. 7000π
D. 10000π

6. En la figura, cos α = 0,15 y b= 1,5 cm, entonces, ¿Cuál es el valor de la hipotenusa?



A. 100 cm B. 15 cm C. 12,5 cm D. 10 cm

7. Para determinar la altura de un poste, Cristian se ha alejado 7 metros de su base y ha medido el ángulo que forma la visual al punto más alto del poste, obteniendo un valor de 40°. Si Cristian ignora su propia altura, ¿Cuál es la altura del poste?

A. 7*tan (40°) B. 7*cos (40°) C. 7*cosec (40°) D. 7*cotan (40°) E. falta información

8. A cierta hora del día los rayos solares forman un ángulo de 60º con el suelo. ¿Qué sombra dará un árbol de 7 m de altura?

A. 8,08 m B. 4,04 m C. 12.12 m D. 14m

9. De un triángulo rectángulo sabemos que sus catetos miden 6 m y 10 m respectivamente. Entonces:

A. Los ángulos son 20º y 70º
B. La hipotenusa mide 8 m
C. La hipotenusa mide 11,66 m
D. Ambos ángulos agudos son 45º.

10. Si nos alejamos 10 metros del pie de una palmera, vemos sus ramas más altas con un ángulo de 52º. Entonces la altura de la palmera es:

A. 12,8 m B. 7,81 m C. 10 m D. 9,27 m

JUEGOS MATEMÁTICOS

11. Una abuela, su hija y su nieta pueden decir este año 2020 que la suma de sus edades es 100 ¿En qué año nació la nieta, si cada edad es una potencia de dos?

12. Se tiene 9 monedas que lucen idénticas, pero una de ellas es falsa; por lo que es más liviana que las demás. Usando la balanza. ¿Cuál es el mínimo número de pesajes que se necesitan para encontrar la moneda falsa?